Modulräume von Bündeln - Rationalität, Existenz von Poincaré-Familien und Geradenbündel auf den Modulstacks

Norbert Hoffmann

Zusammenfassung

Modulräume sind ein zentraler Gegenstand der modernen algebraischen Geometrie. Sie entstammen den fundamentalen Klassifikationsproblemen, wie der Klassifikation algebraischer Varietäten, oder der Klassifikation der Vektorbündel auf einer festen Varietät. Es stellt sich heraus, dass solche Objekte normalerweise einige diskrete Invarianten besitzen. Werden sie festgehalten, so neigen die Isomorphieklassen dieser Objekte dazu, eine algebraische Varietät zu bilden, ihren Modulraum.

Diese schriftliche Habilitationsleistung behandelt Modulräume von Vektorbündeln, oder allgemeiner von Prinzipalbündeln, über einer festen algebraischen Varietät. Sie besteht aus den folgenden Arbeiten:

[1] N. Hoffmann. The Moduli Stack of Vector Bundles on a Curve. In I. Biswas, R.S. Kulkarni, und S. Mitra (Hrsg.), *Teichmüller Theory and Moduli Problem (Allahabad 2006)*, S. 387–394. Ramanujan Math. Soc. Lecture Notes 10, 2010.

[2] N. Hoffmann. Moduli stacks of vector bundles on curves and the King-Schofield rationality proof. In F. Bogomolov und Y. Tschinkel (Hrsg.), *Cohomological and Geometric Approaches to Rationality Problems. New Perspectives*, S. 133–148. Progress in Mathematics 282, Birkhäuser, 2010.

[3] N. Hoffmann. Rationality and Poincaré families for vector bundles with extra structure on a curve. *Int. Math. Res. Not., Article ID rnm010, 30 S.*, 2007.

[4] N. Hoffmann. On Moduli Stacks of G-bundles over a Curve. In A. Schmitt (Hrsg.), *Affine Flag Manifolds and Principal Bundles (Berlin 2008)*. erscheint in Trends in Mathematics, Birkhäuser, 2010.

[5] I. Biswas und N. Hoffmann. Poincaré families and automorphisms of principal bundles on a curve. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 347(21-22):1285–1288, 2009.

[6] I. Biswas und N. Hoffmann. Some moduli stacks of symplectic bundles on a curve are rational. *Adv. Math.*, 219:1150–1176, 2008.

[7] I. Biswas und N. Hoffmann. The line bundles on moduli stacks of principal bundles on a curve. *Documenta Math.*, 15:35–72, 2010.

[8] I. Biswas und N. Hoffmann. Poincaré families of G-bundles on a curve. preprint arXiv:1001.2123 (eingereicht). erhältlich unter `http://www.arXiv.org`.

[9] N. Hoffmann. The moduli space of special instanton bundles is rational.

Die Texte [1, 2, 3] behandeln Modulräume von Vektorbündeln auf C, einer glatten projektiven Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k beliebiger Charakteristik. Dann handeln [4, 5, 6, 7, 8] allgemeiner von Modulräumen von Prinzipalbündeln auf C. Schließlich behandelt [9] Vektorbündel auf höherdimensionalen komplex-projektiven Räumen $\mathbb{P}^{2n+1}$.

Modulräume parametrisieren die Isomorphieklassen von algebraisch-geometrischen Objekten, aber sie sind auch selbst interessante Beispiele für algebraische Varietäten. Deswegen liegt es nahe, nach ihren grundlegenden Invarianten als Varietäten zu fragen, etwa nach ihrem birationalen Typ. Die hier betrachteten Modulräume neigen dazu, unirational zu sein; die interessante Frage ist daher, ob sie tatsächlich rational sind.

Vektorbündel oder Prinzipalbündel besitzen in der Regel nichttriviale Automorphismen. Daraus folgt, mit einem Standardargument, dass ihr Modulfunktor in der Regel nicht darstellbar (in der Tat nicht einmal eine Garbe) ist. Daher sind ihre Modulräume nur grobe Modulschemata. Eine Art, diesen Defekt zu messen, ist zu fragen, ob es eine durch das grobe Modulschema (oder einen dichten offenen Teil davon) parametrisierte Familie von Bündeln gibt, deren Einschränkung auf jeden Punkt des Modulraums in der Isomorphieklasse liegt, die durch diesen Punkt gegeben ist. Eine solche Familie wird hier *Poincaré-Familie* genannt, da sie das Poincaré-Bündel auf dem Produkt einer abelschen Varietät mit der dualen abelschen Varietät verallgemeinert. (Eine solche Familie wird manchmal auch universelle Familie genannt, obwohl sie nicht eindeutig bestimmt zu sein braucht. Falls sie existiert, wird das Modulschema auch fein genannt, da es dann eine leichte Modifikation des ursprünglichen Modulfunktors darstellt.)

Diese beiden klassischen Fragen über grobe Modulschemata werden im vorliegenden Werk studiert. Der wesentliche technische Fortschritt besteht in der Verwendung von Modulstacks. Sie haben in diesem Kontext zwei Vorteile:

- Sie helfen, den Zusammenhang zwischen dem birationalen Typ des groben Modulschemas und der Existenz von Poincaré-Familien (für kleine offene Unterschemata) zu klären, da beides im birationalen Typ des Modulstacks enthalten ist.
- Es stellt sich heraus, dass die Existenz von Poincaré-Familien eng mit der Existenz von Geradenbündeln auf dem Modulstack mit bestimmten Eigenschaften zusammenhängt. Tatsächlich gestattet dies, die Frage für Prinzipalbündel auf der Kurve C vollständig zu beantworten; siehe [8].

Es folgt nun eine detailliertere Beschreibung der einzelnen Arbeiten; siehe auch deren jeweilige Einleitungen für genauere Inhaltsangaben.

Der Übersichtsartikel [1] erklärt die Begriffe Stack und algebraischer Stack kurz und nicht zu technisch; illustriert werden sie durch das Beispiel des Modulstacks von Vektorbündeln auf der Kurve C. Motiviert durch einen Vergleich des Verklebens von Vektorbündeln und von Abbildungen in ein Schema wird argumentiert, dass ein feiner Modulraum von Vektorbündeln keine Menge mit geometrischer Struktur sein kann, sondern eine Kategorie mit geometrischer Struktur sein sollte. Dann werden Stacks eingeführt als eine Art von Garben von Kategorien (genauer gesagt von Gruppoiden). Schließlich werden die beiden Algebraizitätsbedingungen für Stacks nach Deligne-Mumford [DM] und nach Artin [Ar] als Analoga der Bedingung an eine Garbe von Mengen erklärt, (darstellbar durch) ein Schema zu sein.

Die Arbeit [2] behandelt die Rationalitätsfrage für Modulräume von Vektorbündeln mit fixierter Determinante auf der Kurve C, von der angenommen wird, dass ihr Geschlecht mindestens 2 ist. Für ein gegebenes Geradenbündel L auf C sei $\mathfrak{Bun}_{r,L}$ das grobe Modulschema der stabilen Vektorbündel E vom Rang r auf C mit Determinante $\Lambda^r E \cong L$. Nach Arbeiten von Tyurin [T1, T2] und Newstead

[N1, N2] wurde lange geglaubt, dass $\mathfrak{Bun}_{r,L}$ rational ist, falls r und der Grad von L teilerfremd sind; das wurde schließlich von King und Schofield [KS] bewiesen. Der Beweis beginnt mit dem Nachweis, dass $\mathfrak{Bun}_{r,L}$ birational zu einem getwisteten Grassmannschenbündel über $\mathfrak{Bun}_{r_1,L_1}$ für ein geeignetes $r_1 < r$ ist; dann wird Induktion nach dem Rang benutzt. Allerdings benötigen sie eine stärkere Induktionsvoraussetzung, da r_1 und der Grad von L_1 nicht mehr teilerfremd zu sein brauchen; sie enthält eine Brauerklasse ψ_{r_1,L_1} über $\mathfrak{Bun}_{r_1,L_1}$, die den Twist des Grassmannschenbündels kontrolliert. Die Pointe der Arbeit [2] ist eine konzeptionelle Vereinfachung dieses Beweises durch die Verwendung von Modulstacks. In der Strategie von King und Schofield wird die Brauerklasse durch die entsprechende $\mathbb{G}_m$-Gerbe ersetzt, die einfach der Modulstack der fraglichen Vektorbündel ist; daher genügt es, die Wirkung der skalaren Automorphismen $\mathbb{G}_m \subseteq \mathrm{Aut}(E)$ zu verfolgen. Der Text [2] enthält einen vollständigen Beweis des Ergebnisses von King und Schofield in der Sprache der Stacks, beruhend auf einer birationalen Untersuchung von Grassmannschenbündeln über $\mathbb{G}_m$-Gerben. Ein Anhang fasst die benötigten Eigenschaften der Modulstacks von Vektorbündeln zusammen.

Diese Vereinfachung des Rationalitätsbeweises für Vektorbündel hat die systematische Verallgemeinerung [3] auf Vektorbündel mit Zusatzstruktur ermöglicht. Dazu gehören, zum Beispiel, Vektorbündel mit parabolischen Strukturen [MS, Bi], stabile Paare [Br, Th], kohärente Systeme [LP, RV, KN], und allgemeiner dekorierte Vektorbündel [Sch]. Wiederum mittels Vektorbündeln und Grassmannschenbündeln über $\mathbb{G}_m$-Gerben wird bewiesen, dass die fraglichen Modulstacks birational sind zum Produkt eines affinen Raums mit einem Modulstack von Vektorbündeln ohne Zusatzstruktur, von (in der Regel) kleinerem Rang. Neben der Rationalität einiger der groben Modulschemata zeigt dies auch, welche von ihnen Poincaré-Familien (auf kleinen offenen Unterschemata) besitzen, da dies für Vektorbündel nach Ramanan [Ra] bekannt ist. Tatsächlich ist das Hindernis gegen Poincaré-Familien genau die Brauerklasse ψ, die King und Schofield verwenden. Rationalität wird hier, wie bei den Vektorbündeln ohne Zusatzstruktur, in den Fällen bewiesen, wo es Poincaré-Familien gibt. Die übrigen Fälle werden auf Modulräume von Vektorbündeln mit trivialer Determinante auf C zurückgeführt, wo das Rationalitätsproblem nach wie vor weit offen ist.

Die nächsten Arbeiten [4, 5, 6, 7, 8] behandeln Verallgemeinerungen dieser Ergebnisse von Vektorbündeln auf Prinzipalbündel über der Kurve C. Der Übersichtsartikel [4] erklärt einige grundlegende Eigenschaften der Modulstacks $\mathcal{M}_G$ von G-Prinzipalbündeln auf C, wie Algebraizität und Glattheit, für lineare algebraische Gruppen G über k. Das Hauptresultat besagt, dass für glatte zusammenhängende reduktive G die Zusammenhangskomponenten $\mathcal{M}_G^d$ von $\mathcal{M}_G$ durch die Elemente $d \in \pi_1(G)$ indiziert werden; dies ist per definitionem der Quotient der abelschen Gruppe $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T_G)$ für einen maximalen Torus $T_G \subseteq G$ modulo der von den Kowurzeln von G erzeugten Untergruppe. (Diese Beschreibung von $\pi_0(\mathcal{M}_G)$ ist als Folklore wohlbekannt, aber es scheint keine publizierte Quelle dafür in voller Allgemeinheit zu geben, die auch den Fall positiver Charakteristik mit abdeckt.)

Es bezeiche $\mathfrak{M}_G^{d,\mathrm{s}}$ das grobe Modulschema[1] der stabilen G-Prinzipalbündel vom Typ $d \in \pi_1(G)$. Die kurze Arbeit [5] gibt eine notwendige Bedingung dafür an, dass es Poincaré-Familien auf beliebig kleinen offenen Unterschemata $U \subseteq \mathfrak{M}_G^{d,\mathrm{s}}$ gibt, nämlich dass jeder Charakter $Z_G \to \mathbb{G}_m$ auf dem Zentrum $Z_G \subseteq G$ auf die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(E)$ jedes G-Prinzipalbündels E des gegebenen Typs $d \in \pi_1(G)$ fortgesetzt werden kann. Der Beweis besteht aus einem einfachen Argument, das Geradenbündel auf dem Stack $\mathcal{M}_G^d$ benutzt. Dieses Kriterium impliziert die früheren Resultate von Ramanan [Ra] und Balaji-Biswas-Nagaraj-Newstead [BBNN]. Es gestattet auch, diese Frage für die Modulräume orthogonaler und

[1] In [5] wird dieses grobe Modulschema mit $M^{\mathrm{s}}_{G,d}$ bezeichnet.

symplektischer Bündel zu beantworten. Im Falle von getwisteten symplektischen Bündeln, d. h. von Vektorbündeln E vom Rang $2n$ zusammen mit einer symplektischen Form $b : E \otimes E \to L$ mit Werten in einem festen Geradenbündel L, ergibt sich, dass Poincaré-Familien genau dann existieren, wenn n und der Grad von L beide ungerade sind.

Die folgende Arbeit [6] behandelt das Rationalitätsproblem für Modulräume solcher getwisteten symplektischen Bündel $(E, b : E \otimes E \to L)$ auf C. In Analogie zum Fall der Vektorbündel legt das Resultat über Poincaré-Familien nahe, dass die Modulräume rational sein könnten, falls die festgehaltenen diskreten Parameter $n = \mathrm{rank}(E)/2$ und $\deg(L)$ beide ungerade sind. Diese Rationalitätsaussage wird in [6] bewiesen. Tatsächlich wird gezeigt, dass der Modulstack birational zu einem Produkt aus einem affinen Raum und $B\mathbb{G}_m$ ist, was unmöglich wäre, wenn es keine Poincaré-Familien gäbe. Der Beweis beginnt damit, für jedes hinreichend allgemeine getwistete symplektische Bündel $(E, b : E \otimes E \to L)$ mit n und $\deg(L)$ ungerade ein 'kanonisches' Untergeradenbündel in E auszuzeichnen. Damit kann E aus einem Bündel kleineren Ranges zusammen mit geeigneten Extensionsdaten zurückgewonnen werden; all dies kann rational parametrisiert werden.

Wie die Argumente in [5] zeigen, kann die Information über Poincaré-Familien aus der Picardgruppe des Modulstacks $\mathcal{M}_G^d$ gewonnen werden. Die Arbeit [7] bestimmt alle Geradenbündel auf diesen Modulstacks $\mathcal{M}_G^d$, für alle zusamenhängenden reduktiven Gruppen G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k beliebiger Charakteristik. Das verallgemeinert frühere Resultate von Kumar-Narasimhan-Ramanathan [KNR, KN] und Beauville-Laszlo-Sorger [BLS, LS, So] für einfach-zusammenhängende oder klassische Gruppen über $k = \mathbb{C}$. Es liefert insbesondere einen algebraischen Beweis für Telemans [Te] Ergebnis für halbeinfache Gruppen über $\mathbb{C}$, das er mit topologischen und analytischen Methoden bewiesen hat. Die wichtigsten Hilfsmittel sind Faltings' [Fa] Ergebnis für einfach-zusammenhängende Gruppen in beliebiger Charakteristik, und Laszlo's [La] Methode des Abstiegs entlang von Torsoren unter Gruppenstacks.

Aufgrund seiner Allgemeinheit ist das Hauptergebnis von [7], nämlich die Beschreibung von $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_G^d)$, etwas länger. Hier sind die wichtigsten Punkte:

- Die abelsche Gruppe der Homomorphismen von $\pi_1(G)$ in die Jacobische J_C bettet sich kanonisch nach $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_G^d)$ ein.
- Der Quotient ist eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe, die mit $\mathrm{NS}(\mathcal{M}_G^d)$ bezeichnet wird.
- Ist $G = T$ ein Torus, mit Kocharaktergitter $\Lambda_T := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$, so ist $\mathrm{NS}(\mathcal{M}_T^d)$ die direkte Summe aus $\mathrm{Hom}(\Lambda_T, \mathbb{Z})$ und der abelschen Gruppe aller bilinearen Abbildungen $b : \Lambda_T \otimes \Lambda_T \to \mathrm{End}\, J_C$, die $b(\lambda_1 \otimes \lambda_2)^\dagger = b(\lambda_2 \otimes \lambda_1)$ für die Rosati-Involution † auf $\mathrm{End}\, J_C$ erfüllen.
- Ist G halbeinfach, und ist $T_G \subseteq G$ ein maximaler Torus, dann ist $\mathrm{NS}(\mathcal{M}_G^d)$ die abelsche Gruppe der symmetrischen und Weyl-invarianten Bilinearformen $b : \Lambda_{T_G} \otimes \Lambda_{T_G} \to \mathbb{Z}$, deren Einschränkung auf das Kowurzelgitter gerade ist.

Sowohl im Beweis, als auch für die Anwendung weiter unten, ist es wichtig, dass die Beschreibung von $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_G^d)$ funktoriell in G ist, insbesondere bezüglich der Einbettung $\iota : T_G \hookrightarrow G$ eines maximalen Torus. Ist $\delta \in \pi_1(T_G) = \Lambda_{T_G}$ ein Urbild von $d \in \pi_1(G)$, so induziert ι einen 1-Morphismus der Modulstacks $\iota_* : \mathcal{M}_{T_G}^\delta \to \mathcal{M}_G^d$ durch Erweiterung der Strukturgruppe.

- Ist G halbeinfach, so ist die Rückzugsabbildung $\iota^* : \mathrm{Pic}(\mathcal{M}_G^d) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{M}_{T_G}^\delta)$ verträglich mit der Abbildung
$$\iota^{\mathrm{NS},\delta} : \mathrm{NS}(\mathcal{M}_G^d) \longrightarrow \mathrm{NS}(\mathcal{M}_{T_G}^\delta), \qquad b \mapsto \big(b(-\delta \otimes \_),\ \mathrm{id}_{J_C} \cdot b\big).$$

Dies sind die Hauptzutaten zur allgemeinen Beschreibung der abelschen Gruppe $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_G^d)$ und ihrer Funktorialität in G, die in [7] hergeleitet wird.

Unter Benutzung dieser Ergebnisse gibt die Arbeit [8] eine vollständige Antwort auf die Frage nach der Existenz von Poincaré-Familien auf den groben Modulschemata $\mathfrak{M}_G^{d,\mathrm{s}}$ der stabilen G-Prinzipalbündel E über C. Sie beantwortet, wiederum in Termen von Bilinearformen auf dem Wurzelsystem von G, die folgenden beiden Varianten der Frage:

- Gibt es eine Poincaré-Familie, die von einem (beliebig kleinen) nichtleeren offenen Unterschema $U \subseteq \mathfrak{M}_G^{d,\mathrm{s}}$ parametrisiert wird?

- Gibt es eine Poincaré-Familie, die vom offenen Ort $\mathfrak{M}_G^{d,\mathrm{rs}} \subseteq \mathfrak{M}_G^{d,\mathrm{s}}$ der regulär stabilen G-Prinzipalbündel parametrisiert wird?

Dabei heißt ein stabiles G-Prinzipalbündel E über C regulär stabil, falls $\mathrm{Aut}(E)$ mit dem Zentrum Z_G von G übereinstimmt. Der regulär stabile Ort $\mathcal{M}_G^{d,\mathrm{rs}}$ im Modulstack $\mathcal{M}_G^d$ ist eine Gerbe mit Band Z_G über $\mathfrak{M}_G^{d,\mathrm{rs}}$; die zugehörige Klasse in $\mathrm{H}^2(\mathfrak{M}_G^{d,\mathrm{rs}}, Z_G)$ ist das Hindernis gegen Poincaré-Familien. Tatsächlich bestimmt [8] die Ordnung dieses Hindernisses in der Kohomologiegruppe, und auch die Ordnung seiner Einschränkung auf den generischen Punkt von $\mathfrak{M}_G^{d,\mathrm{rs}}$.

Die verwendete Methode besteht darin, die Frage in eine über Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf $\mathcal{M}_G^d$ zu übersetzen. Ist ein solches Geradenbündel $\mathcal{L}$ und ein G-Prinzipalbündel E über C vom Typ $d \in \pi_1(G)$ gegeben, so operiert die Gruppe $\mathrm{Aut}(E)$ auf der Faser von $\mathcal{L}$ über dem Modulpunkt von E. So erhalten wir einen Charakter von $\mathrm{Aut}(E)$. Dessen Einschränkung auf die Untergruppe $Z_G \subseteq \mathrm{Aut}(E)$ hängt nicht von E ab, da $\mathcal{M}_G^d$ zusammenhängend und $\mathrm{Hom}(Z_G, \mathbb{G}_m)$ diskret ist. Daher bekommen wir einen Homomorphismus $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_G^d) \to \mathrm{Hom}(Z_G, \mathbb{G}_m)$. Es stellt sich heraus, dass dieser Homomorphismus durch $\mathrm{NS}(\mathcal{M}_G^d)$ faktorisiert, und sogar durch $\mathrm{NS}(\mathcal{M}_{T_G}^\delta)$, wo er in der Sprache von [7] explizit beschrieben werden kann. Die Kenntnis dieses Homomorphismus beantwortet dann, unter Benutzung von Giraud's [Gi] Theorie der Gerben, die betrachteten Fragen.

Allerding funktionieren diese Argumente nur, wenn der regulär stabile Ort nicht leer ist. In Charakteristik 0 ist dies für jedes Geschlecht $g_C \geq 2$ bekannt. Aber in positiver Charakteristik stellte es sich als schwieriger als erwartet heraus; es ist in [8] für Geschlecht $g_C \geq 3$ bewiesen. Tatsächlich erfordern die Aussagen über $\mathfrak{M}_G^{d,\mathrm{rs}}$ den Nachweis, dass das Komplement von $\mathcal{M}_G^{d,\mathrm{rs}}$ in $\mathcal{M}_G^d$ Kodimension ≥ 2 hat; das wird für Geschlecht $g_C \geq 4$ in [8] bewiesen.

Die Arbeit [9] behandelt Instanton-Bündel über dem komplex-projektiven Raum $\mathbb{P}^{2n+1}$. Dies sind per definitionem algebraische Vektorbündel vom Rang $2n$ auf $\mathbb{P}^{2n+1}$, die bestimmten Bedingungen genügen. Diese sind durch die Penrose-Transformation motiviert, die für $n = 1$ eine Korrespondenz zu Lösungen gewisser Yang-Mills-Gleichungen [AW, DV] liefert; Okonek und Spindler [OS] haben die Definition auf den Fall $n \geq 1$ verallgemeinert. Spezielle Instanton-Bündel wurden eingeführt, und ihre Modulräume studiert, von Hirschowitz-Narasimhan [HN] für $n = 1$, und von Spindler-Trautmann [ST] für alle $n \geq 1$. Das Hauptresultat in [9] besagt, dass die Modulräume spezieller Instanton-Bündel nach Spindler-Trautmann alle rational sind; dies verallgemeinert ein Ergebnis für $n = 1$ in [HN].

Wie im Fall von Vektorbündeln auf einer Kurve beinhaltet der Beweis die Rationalität gewisser Severi-Brauer-Varietäten. Deren Brauerklassen hängen mit der Existenz von Poincaré-Familien zusammen; Spindler und Trautmann ermitteln in [ST], wann es diese gibt. Ein etwas überraschender Aspekt dieser Situation ist, dass die Rationalität der groben Modulschemata sogar in den Fällen nachgewiesen wird, in denen es keine Poincaré-Familien gibt.

Die wesentliche neue Zutat zum Beweis, im Vergleich zum Spezialfall $n = 1$ in [HN], ist das No-Name-Lemma über Vektorräume modulo linearer Gruppenoperationen. Es gestattet, dieses Problem schließlich auf die Rationalität eines Quotienten modulo PGL_2 zurückzuführen, bei dem der Invariantenring explizit bekannt ist. Auf diese Weise wird hier die Rationalität des groben Modulschemas bewiesen, ohne zugleich eine Poincaré-Familie für einen offenen Teil davon zu konstruieren. Obwohl der Rationalitätsbeweis in der Sprache der Schemata bleibt, half der Standpunkt der Stacks dabei, ihn zu finden und die subtilen Existenzfragen von Poincaré-Familien auf weiteren Modulräumen zu klären, die als Zwischenschritte in der Konstruktion von Spindler und Trautmann auftreten; diese Dinge werden in einer Serie von Bemerkungen in [9] erklärt.

Danksagung

Ich möchte I. Biswas, L. Costa, J. Heinloth, A. Schmitt, U. Stuhler und Y. Tschinkel herzlich danken für Anregungen und Unterstützung im Verlauf dieser Arbeit. Sie wurde finanziert durch die Georg-August-Universität in Göttingen, das Tata Institute of Fundamental Research in Mumbai (Indien), den SFB/TR 45 "Perioden, Modulräume und Arithmetik algebraischer Varietäten" und den SFB 647 "Raum-Zeit-Materie" an der Freien Universität Berlin.

Literatur

[Ar] M. Artin. Versal deformations and algebraic stacks. *Invent. Math.*, 27:165–189, 1974.

[AW] M.F. Atiyah and R.S. Ward. Instantons and algebraic geometry. *Commun. Math. Phys.*, 55:117–124, 1977.

[BBNN] V. Balaji, I. Biswas, D.S. Nagaraj, and P.E. Newstead. Universal families on moduli spaces of principal bundles on curves. *Int. Math. Res. Not.*, Article ID 80641, 2006.

[BLS] A. Beauville, Y. Laszlo, and C. Sorger, *The Picard group of the moduli of G-bundles on a curve*, Compositio Math. **112** (1998), no. 2, 183–216.

[Bi] I. Biswas. Parabolic bundles as orbifold bundles. *Duke Math. J.*, 88:305–325, 1997.

[Br] S. Bradlow. Special metrics and stability for holomorphic bundles with global sections. *J. Differential Geom.*, 33:169–213, 1991.

[DM] P. Deligne and D. Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (36):75–109, 1969.

[DV] A. Douady and J.-L. Verdier, editors. *Les équations de Yang-Mills. Séminaire E.N.S. 1977-1978*, Astérisque 71-72. Paris: Soc. Math. France, 1980.

[Gi] J. Giraud. *Cohomologie non abélienne.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971.

[KN] A. King and P. E. Newstead. Moduli of Brill-Noether pairs on algebraic curves. *Internat. J. Math.*, 6(5):733–748, 1995.

[Fa] G. Faltings, *Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **5** (2003), no. 1, 41–68.

[HN] A. Hirschowitz and M.S. Narasimhan. Fibres de 't Hooft speciaux et applications. In *Enumerative geometry and classical algebraic geometry (Nice 1981)*, pages 143–164. Progress in Math. 24, Birkhäuser, 1982.

[KS] A. King and A. Schofield. Rationality of moduli of vector bundles on curves. *Indag. Math. (N.S.)*, 10(4):519–535, 1999.

[KN] S. Kumar and M. S. Narasimhan, *Picard group of the moduli spaces of G-bundles*, Math. Ann. **308** (1997), no. 1, 155–173.

[KNR] S. Kumar, M. S. Narasimhan, and A. Ramanathan, *Infinite Grassmannians and moduli spaces of G-bundles*, Math. Ann. **300** (1994), no. 1, 41–75.

[La] Y. Laszlo, *Linearization of group stack actions and the Picard group of the moduli of SL_r/μ_s-bundles on a curve*, Bull. Soc. Math. France **125** (1997), no. 4, 529–545.

[LS] Y. Laszlo and C. Sorger, *The line bundles on the moduli of parabolic G-bundles over curves and their sections*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **30** (1997), no. 4, 499–525.

[LP] J. Le Potier. *Systèmes cohérents et structures de niveau*, volume 214 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1993.

[MS] V. B. Mehta and C. S. Seshadri. Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures. *Math. Ann.*, 248(3):205–239, 1980.

[N1] P. E. Newstead. Rationality of moduli spaces of stable bundles. *Math. Ann.*, 215:251–268, 1975.

[N2] P. E. Newstead. Correction to: "Rationality of moduli spaces of stable bundles". *Math. Ann.*, 249(3):281–282, 1980.

[OS] C. Okonek and H. Spindler. Mathematical instanton bundles on $\mathbb{P}^{2n+1}$. *J. Reine Angew. Math.*, 364:35–50, 1986.

[RV] N. Raghavendra and P. Vishwanath. Moduli of pairs and generalized theta divisors. *Tohoku Math. J. (2)*, 46(3):321–340, 1994.

[Ra] S. Ramanan. The moduli spaces of vector bundles over an algebraic curve. *Math. Ann.*, 200:69–84, 1973.

[Sch] A. Schmitt. A universal construction for moduli spaces of decorated vector bundles over curves. *Transform. Groups*, 9:167–209, 2004.

[So] C. Sorger, *On moduli of G-bundles of a curve for exceptional G*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **32** (1999), no. 1, 127–133.

[ST] H. Spindler and G. Trautmann. Special instanton bundles on $\mathbb{P}_{2N+1}$, their geometry and their moduli. *Math. Ann.*, 286(1-3):559–592, 1990.

[Te] C. Teleman, *Borel-Weil-Bott theory on the moduli stack of G-bundles over a curve*, Invent. Math. **134** (1998), no. 1, 1–57.

[Th] M. Thaddeus. Stable pairs, linear systems and the Verlinde formula. *Invent. Math.*, 117:317–353, 1994.

[T1] A. N. Tyurin. Classification of vector bundles over an algebraic curve of arbitrary genus. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 29:657–688, 1965. English translation: *Amer. Math. Soc. Transl.* 63, 1967.

[T2] A. N. Tyurin. Classification of n-dimensional vector bundles over an algebraic curve of arbitrary genus. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 30:1353–1366, 1966. English translation: *Amer. Math. Soc. Transl.* 73, 1968.